

# Einfluß der Raumladung auf die Phasenfokussierung von Elektronenstrahlen

Von JOHANNES LABUS<sup>1</sup>

(Z. Naturforschg. 3a, 52–61 [1948]; eingegangen am 14. April 1947)

Infolge der Einwirkung eines achsialen elektrischen Feldes auf einen Elektronenstrahl bilden sich in einer bestimmten Entfernung Verdichtungen der elektrischen Ladung aus. Bringt man an dieser Stelle einen elektromagnetischen Resonator an, in welchem die kinetische Energie dieser Elektronenpakete durch Influenzwirkung in Hochfrequenzenergie umgewandelt wird, so bildet diese Anordnung einen Laufzeit-generator (Triftröhre oder Klystron). Die vorliegende Untersuchung befaßt sich mit der Frage, ob das Zustandekommen der erwähnten Ladungsverdichtungen (Ballungen) durch die Raumladung der Elektronen und somit durch die zwischen denselben vorhandenen abstoßenden Kräfte verhindert werden kann; ferner wird der Einfluß dieser Raumladung auf den Wirkungsgrad untersucht.

Die Untersuchung ergibt, daß die abstoßenden Kräfte die Ballung von Elektronen nicht verhindern. Diese wird sogar infolge der verlängerten Laufzeit insofern begünstigt, als man mit geringeren Aussteuerungen auskommt. Wenn die Raumladung einen bestimmten Wert überschreitet, kann keine Ladungs- bzw. Stromspitze am Ende des Laufraumes (Raum zwischen Steuerfeld und Resonator) erzielt werden, wie groß die Aussteuerung auch sein mag. Diese Spitze rückt dann in das Innere des Laufraumes. Unterhalb dieses kritischen Wertes der Raumladung beträgt der Wirkungsgrad 44%.

Bei dieser Überlegung wurden die Elektronen nur bis zur Stelle ihrer Einholung verfolgt. Die nachteilige Wirkung der Raumladung stellt sich erst ein, wenn man versucht, den Wirkungsgrad durch Zulassung von Überholung der Elektronen zu steigern. Bei Annahme eines unendlich kurzen Steuerraumes beträgt er dann ohne Berücksichtigung der Raumladung 58%. Innerhalb des Laufraumes findet unter den Elektronen ein Energieaustausch statt, demzufolge die Elektronen bei höheren Raumladungen ihre im Steuerraum gewonnene Wechselkomponente teilweise verlieren. Ferner kommt noch hinzu, daß im Bereich der Überholung ein elektrisches Beschleunigungsfeld, herührend von der Raumladung des Elektronenstrahls, vorhanden ist, welches die Bildung von Ballungen beeinträchtigt. Infolgedessen bewegt sich der Wirkungsgrad je nach Größe der Raumladung zwischen 58 und 44%.

Wird ein Elektronenstrahl von einem achsialen elektrischen Feld (Steuerfeld) beeinflusst, so erfahren die Elektronen eine Geschwindigkeitssteuerung. Die aufeinanderfolgenden Elektronen besitzen daher im Rhythmus dieser Aussteuerung verschiedene Geschwindigkeiten und sind imstande, sich in einem anschließenden, von äußeren Feldern freien Raum (Laufrum) einzuholen (Abb.1). Auf diese Weise entstehen Verdichtungen von Elektronen (Ballungen). Bringt man an einer solchen Stelle einen auf die Steuerfrequenz abgestimmten Resonator (Arbeitsraum) an, so wird an ihn durch Induktionswirkung die kinetische Energie der Elektronenpakete als Hochfrequenzenergie abgegeben. Sorgt man schließlich dafür, daß ein Teil dieser Energie zur Erregung des Steuerfeldes zurückgekoppelt wird, dann spricht

man von einem Laufzeitgenerator (Heilscher Oszillator, Triftröhre, Klystron). Die Anwendung dieser Geschwindigkeitssteuerung zur Erzeugung

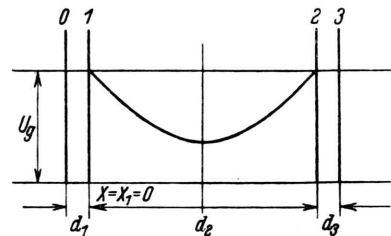


Abb. 1. Potentialverlauf im Laufrum einer Triftröhre. Steuerraum: 0–1; Laufrum: 1–2; Arbeitsraum (Energieabgabe) 2–3.

von Elektronenballungen bezeichnet man mit Brüche und Recknagel<sup>2</sup> als Phasenfokussierung.

<sup>1</sup> Derzeit in Marquartstein-Niedernfels (Obb.). Auszug aus einer 1944 im Auftrage der Reichsstelle für Hochfrequenzforschung fertiggestellten Arbeit.

<sup>2</sup> E. Brüche u. A. Recknagel, Z. Physik 108, 454 [1938].



Der Wirkungsgrad dieser Anordnung wurde in einer Reihe von Arbeiten berechnet. Bei diesen Untersuchungen wird gewöhnlich die Wirkung der Ladung der Elektronen auf die Vorgänge im Laufräum vernachlässigt. Ein Ansatz zur Abschätzung dieser Wirkung liegt bereits bei Webster<sup>3</sup> vor. In der amerikanischen Literatur wurde ferner die Raumladung von Fuchs und Kompfner<sup>4</sup> berücksichtigt. Eine strenge Theorie der Triftröhren wurde von König<sup>5</sup> entwickelt und auf die sog. Feldfokussierung angewendet, bei der die drei genannten Räume in einem elektrischen Feld vereinigt sind. Borgnis und Ledinegg<sup>6</sup> untersuchen den Einfluß der Raumladung auf die harmonischen Komponenten des Konvektionsstromes im Arbeitsraum und errechnen einen Wirkungsgrad, der weit unter dem von Webster angegebenen Wert von 58% liegt. Als Ursache werden die abstoßenden Kräfte zwischen den Elektronen angegeben. Der Grund dafür liegt darin, daß sie die elektrische Feldstärke an der Eintrittsstelle des Laufraumes vernachlässigen. Diese Annahme ist jedoch nicht zulässig. Die negative Raumladung im Innern des Laufraumes bindet an der Ein- und Austrittsebene des Laufraumes elektrische Felder, die so gerichtet sind, daß die Elektronen bis zur Laufräummitte verzögert und von da ab beschleunigt werden. Wenn man nun an der Eintrittsstelle die Feldstärke verschwinden läßt, so ist diese Bedingung — bei vorhandener Raumladung — nur durch ein zusätzliches Beschleunigungsfeld zu verwirklichen. In einem Beschleunigungsfeld kann aber unterhalb bestimmter Geschwindigkeitsunterschiede der Elektronen keine Einholung stattfinden; die Ballung von Elektronen wird daher beeinträchtigt.

Die vorliegende Untersuchung geht aus von der Poissonschen Gleichung (1), der Bewegungsgleichung (2) und der Kontinuitätsgleichung (3), durch welche die elektrische Feldstärke  $\mathcal{E}$  (Volt/cm), die Raumladung  $q$  und die Geschwindigkeit  $v$  miteinander verknüpft werden:

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \mathcal{E} = q, \quad (1)$$

$$m \frac{dv}{dt} = e \mathcal{E}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} (q v) + \frac{\partial q}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

worin  $\epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-14}$  die DK im Vakuum und  $k = |e/m| = 17,6 \cdot 10^{14}$  das Verhältnis der Ladung zur Masse eines Elektrons bedeuten. Es wird der eindimensionale Fall (Elektronenstrahl von unendlichem Querschnitt) untersucht. Bei Annahme eines sehr kurzen Steuerfeldes findet innerhalb desselben keine Verdichtung statt, und somit ist der in den Laufräum eintretende Konvektionsstrom gleich dem Gleichstrom  $I_g$  des ungesteuerten Elektronenstrahls. Aus diesen Gleichungen berechnet sich die Feldstärke, die ein Elektron am Ort  $x$  zur Zeit  $t$  vorfindet, mit

$$\mathcal{E}(x, t) - \mathcal{E}(x_1, t) = \frac{I_g}{\epsilon_0} (t - t_1); \quad (4)$$

$x_1$  und  $t_1$  beziehen sich auf die Eintrittsstelle des Laufraumes.  $\mathcal{E}(x_1, t)$  bedeutet die Feldstärke an der Eintrittsstelle zur Zeit  $t$ . Gl. (4) läßt sich auch unmittelbar einsehen: auf der linken Seite derselben steht die Differenz der Ladungen an den Stirnflächen eines Zylinders vom Querschnitt 1 und der Länge  $x - x_1$ . Sie ist gleich der in diesen Zylinder während der Zeit  $t - t_1$  eingeströmten Ladung. Die Feldstärke bei  $x_1$  besteht aus einem zeitlich konstanten Anteil  $E_g$  und einem von der Steuerung abhängigen, zeitlich veränderlichen Anteil, den wir durch die zweite Ableitung der Funktion  $g(t)$  ausdrücken. Die Feldstärke lautet dann ( $\omega = 2\pi f$ ;  $f$  = Frequenz der Steuerspannung)

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{I_g}{\epsilon_0} (t - t_1) + E_g + \frac{1}{\omega^2} \ddot{g}(t). \quad (5)$$

Durch Benutzung einer dimensionslosen Schreibweise lassen sich die Beziehungen unabhängig von der Frequenz ausdrücken. Wir führen zu diesem Zwecke (bei sin-förmiger Aussteuerung mit der Kreisfrequenz  $\omega$ ) an Stelle der Zeitwerte  $t$  und  $t_1$  die Phasen  $\varphi = \omega t$  und  $\varphi_1 = \omega t_1$  ein. Die Differenz  $\omega(t - t_1) = \Phi$  ist dann der „wahre Laufzeitwinkel“. Bei fehlender Aussteuerung wird dieser mit  $\Phi_g$  bezeichnet. Die Ortskoordinate  $x$  wird durch den statischen Laufzeitwinkel  $\Phi = \omega x / v_g$  ausgedrückt.  $v_g = \sqrt{2kU_g}$  ist die durch die Beschleunigungsspannung  $U_g$  definierte Geschwindigkeit der Elektronen vor Eintritt in den Steuerraum. Der Index 2 kennzeichnet die Austrittsstelle

<sup>5</sup> H. W. König, Z. Hochfrequenztechn. Elektroakust. **62** [1943].

<sup>3</sup> D. L. Webster, J. appl. Physics **10**, 501 [1939].  
<sup>4</sup> W. H. J. Fuchs u. R. Kompfner, On space charge effects in velocity modulated electron beams.

<sup>6</sup> F. Borgnis u. E. Ledinegg, Ann. Physik **43**, 296 [1943].

des Laufraumes. Unter  $q = U_1/U_g$  ist schließlich das Verhältnis der Steuerwechselspannung (Amplitude) zur Gleichspannung zu verstehen. Gl. (5) lautet nun in der neuen Schreibweise

$$\frac{\varepsilon_0 \omega}{I_g} \mathfrak{E}(x, t) = \Phi_q + P_g + P_q''(\varphi) \quad (6)$$

mit  $P_g = \frac{\varepsilon_0 \omega}{I_g} E_g$ ,  $P_q''(\varphi) = \frac{\varepsilon_0 \omega}{I_g} g''(\varphi)$ .

Das zeitlich konstante Glied  $P_g$  (bzw.  $E_g$ ) gewinnt man durch folgende Überlegung: In der Mitte des Laufraumes bildet sich ein Potentialminimum aus (Abb. 1). An dieser Stelle verschwindet die Feldstärke und es ist, falls  $q = 0$ , dort  $\Phi_q = \Phi_{g_2}/2$ . Folglich ergibt Gl. (6)

$$P_g = -\frac{1}{2} \Phi_{g_2}. \quad (7)$$

Die Elektronengeschwindigkeit  $v_1$  an der Eintrittsstelle berechnet sich aus  $m v_1^2/2 = e(U_g + U_1 \sin \varphi_1)$ . Bei kurzen Steuer- und Arbeitsfeldern muß wegen Vermeidung der Elektronenumkehr in diesen Feldern  $q < 1$  sein. Näherungsweise kann man daher schreiben

$$v_1/v_g = 1 + \frac{q}{2} \sin \varphi_1 = 1 + \frac{q}{2} \sin(\varphi - \Phi_q). \quad (8)$$

Durch Integration der Gl. (2) und Einführung der Konstanten  $Q$

$$Q = \frac{k I_g}{\varepsilon_0 \omega^2 v_g} = \frac{I_g^{A/\text{cm}^2} (\lambda^{\text{cm}})^2}{106 \sqrt{U^{\text{Volt}}}} \quad (9)$$

erhält man für die Geschwindigkeit

$$\frac{v(x, t)}{v_g} = 1 + \frac{q}{2} \sin(\varphi - \Phi_q) + Q \left\{ \frac{1}{2} \Phi_q^2 + P_g \Phi_q + P_q'(\varphi) - P_q'(\varphi - \Phi_q) \right\} \quad (10)$$

und durch weitere Integration

$$\Phi = \left( 1 + \frac{q}{2} \sin(\varphi - \Phi_q) \right) \Phi_q + Q \left\{ \frac{1}{6} \Phi_q^3 + \frac{1}{2} P_g \Phi_q^2 + P_q(\varphi) - P_q(\varphi - \Phi_q) - \Phi_q P_q'(\varphi - \Phi_q) \right\}. \quad (11)$$

Für  $q = 0$  folgt daraus

$$\frac{v}{v_g} = 1 + \frac{1}{2} Q \Phi_g^2 - \frac{1}{2} Q \Phi_g \Phi_{g_2}, \quad (10a)$$

$$\Phi = \Phi_g + Q \left( \frac{1}{6} \Phi_g^3 - \frac{1}{4} \Phi_g^2 \Phi_{g_2} \right); \quad (11a)$$

$$\Phi_2 = \Phi_{g_2} - \frac{1}{12} Q \Phi_{g_2}^3 \dots$$

### Die Randbedingung der Aufgabe

In den Ausdrücken für die Geschwindigkeit und den wahren Laufzeitwinkel ist die Funktion  $P_q(\varphi)$  noch unbekannt. Sie wird aus folgender Randbedingung gewonnen. Infolge des gegenseitigen Energieaustausches zwischen den Elektronen werden diese den Laufraum mit Geschwindigkeiten verlassen, welche verschieden sind von ihren Eintrittsgeschwindigkeiten. Unter der Annahme, daß sich beide Begrenzungsflächen des Laufraumes auf demselben Potential befinden und innerhalb desselben keine äußeren Felder vorhanden sind, muß das Linienintegral über die Feldstärke verschwinden:

$$U_2 = \int_0^{d_2} \mathfrak{E}(x, t) dx = 0. \quad (12a)$$

Da diese Beziehung unabhängig von der Zeit gelten muß, wird bei der Integration  $\varphi$  festgehalten und man erhält mit Gl. (6)

$$[P_g + P_q''(\varphi)] \Phi_2 + \int_0^{\Phi_2} \Phi_q d\Phi = 0. \quad (12)$$

Die Ermittlung der Umkehrfunktion  $\Phi_q(\Phi, \varphi)$  aus der Laufzeitgleichung stößt auf erhebliche Schwierigkeiten; es ist deshalb vorteilhaft, wenn man die Integration nach  $\Phi_q$  durchführt:

$$\int_0^{\Phi_{g_2}} \Phi_q \frac{d\Phi}{d\Phi_q} d\Phi_q.$$

Der in der oberen Grenze noch auftretende wahre Laufzeitwinkel muß nachträglich ermittelt werden. Nach entsprechender Zusammenfassung und mit Bezug auf Gl. (8) folgt die Bestimmungsgleichung für  $P_q(\varphi)$  mit

$$U_2 = F(\Phi_{g_2}) - \frac{q}{2} [\Phi_{g_2} \cos(\varphi - \Phi_{g_2}) - (\Phi_{g_2}^2 - 1) \sin(\varphi - \Phi_{g_2}) (-\sin \varphi)] \quad (13)$$

$$+ \Phi_{g_2} P_q''(\varphi) + Q \int_0^{\Phi_{g_2}} \Phi_q^2 P_q''(\varphi - \Phi_q) d\Phi_q = 0,$$

worin

$$F = \Phi_2 P_g + \frac{1}{2} \Phi_{g_2}^2 + Q \left( \frac{1}{8} \Phi_{g_2}^4 + \frac{1}{3} P_g \Phi_{g_2}^3 \right).$$

Die zulässige Stromdichte des Elektronenstrahles

Um eine Lösung der Gln. (11) und (13) mit einfachen Mitteln zu ermöglichen, müssen ein-

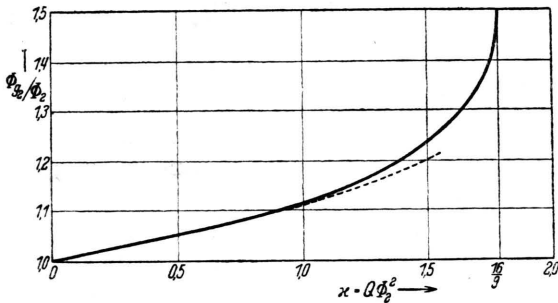


Abb. 2. Einfluß der Raumladung auf die Erhöhung des Laufzeitwinkels. ----- Näherung nach Gl. (17).  $\Phi_{g_2}$  = Laufzeitwinkel bei endlicher Raumladung.  $\Phi_2$  = Laufzeitwinkel ohne Raumladung.

schränkende, aus der Praxis sich ergebende Annahmen über die Konstante  $Q$  gemacht werden. Die Stromdichte und somit der Wert von  $Q$  sind durch zwei Forderungen beschränkt: durch die Vermeidung der Elektronenumkehr im Laufrum und die Strahlverbreiterung. Gl. (11a) führt auf eine kubische Gleichung in  $\Phi_{g_2}/\Phi_2$ , die nur dann reelle Wurzeln besitzt, wenn

$$\kappa = Q \Phi_2^2 < 16/9 \quad \text{bzw.} \quad \kappa_g = Q \Phi_{g_2}^2 < 4. \quad (14)$$

In Abb. 2 ist das Verhältnis  $\Phi_{g_2}/\Phi_2$  in Abhängigkeit von  $\kappa$  dargestellt. Das Potential in der Mitte des Laufraumes sinkt bei Elektronenumkehr auf  $\frac{1}{4} U_g$ .

Bei endlichem Strahlquerschnitt tritt infolge der Verbreiterung Elektronenumkehr erst bei höheren Stromdichten auf als bei eindimensiona-

<sup>7</sup> G. Plato, W. Kleen u. H. Rothe, Z. Physik **101**, 509 [1936].

ler Strömung. Diese durch die abstoßenden Kräfte der Elektronen verursachte Strahlverbreiterung bedingt eine weitere, viel schärfere Einschränkung der Stromdichte. Besonders bei kurzen Wellen können wegen der Kleinheit der Blenden und der Hohlraumresonatoren nur geringe Strahlverbrei-

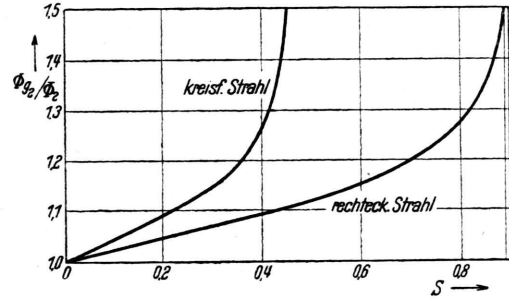


Abb. 3. Erhöhung des Laufzeitwinkels in Abhängigkeit von der Strahlverbreiterung (-aufspreizung).

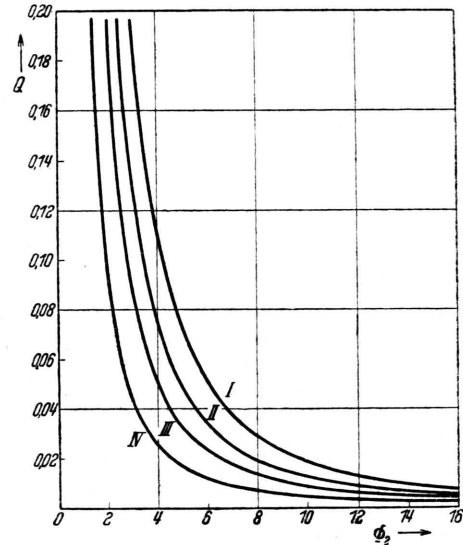


Abb. 4. Konstante  $Q$  in Abhängigkeit vom Laufzeitwinkel, bei verschiedenen Strahlaufspreizungen  $s$ . I:  $s_K = 0,44$ ,  $s_R = 0,88$ ; II:  $s_K = 0,3$ ,  $s_R = 0,6$ ; III:  $s_K = 0,2$ ,  $s_R = 0,4$ ; IV:  $s_K = 0,1$ ,  $s_R = 0,2$ .

terungen zugelassen werden. Für den runden und den rechteckigen Querschnitt wurde die Strahlverbreiterung berechnet<sup>8,9</sup>. Sie wird ausgedrückt durch die Verhältnisse  $s_K$  und  $s_R$ . Bei kreisförmigem Querschnitt ist  $s_K = (r - r_0)/r_0$  ( $r_0$  = Radius vor,  $r$  nach der Verbreiterung), bei rechteckigem

<sup>8</sup> E. E. Watson, Philos. Mag. J. Sci. (7) **3**, 849 [1927].

<sup>9</sup> F. G. Houtermans u. K. H. Riewe, Arch. Elektrotechn. **35**, 686 [1941].



Querschnitt  $s_R = (b - b_0) / b_0$  ( $b_0$  = Schmalseite des Rechteckes vor,  $b$  nach der Verbreiterung). Aus dem Ergebnis der genannten Untersuchung folgt näherungsweise für

$$\begin{aligned} \text{den runden Strahl: } x &\cong 4 s_K, \\ \text{den rechteckigen Strahl: } x &\cong 2 s_R. \end{aligned}$$

Daraus läßt sich mit Hilfe der Abb. 2 bei vorgegebener Strahlverbreiterung  $\Phi_{g_2}$  ermitteln. In Abb. 3 ist  $\Phi_{g_2} / \Phi_2$  in Abhängigkeit von  $s$  aufgetragen. Die Abhängigkeit von  $Q$  vom statischen Laufzeitwinkel ist für einige Werte von  $s$  in Abb. 4 wiedergegeben. Beispielsweise beträgt  $Q = 0,036$  für  $s_K = 0,2$  und  $\Phi_2 = \frac{\pi}{2}$  und fällt mit wachsendem  $\Phi_2$  weiter ab. Für eine Wellenlänge von  $\lambda = 10$  cm und eine Gleichspannung von  $U_g = 3000$  Volt ergibt sich daraus nach Gl. (9) eine zulässige Stromdichte von  $I_g = 2,1$  A/cm<sup>2</sup>; bei  $\lambda = 5$  cm würde sie 8,4 A/cm<sup>2</sup> betragen.

#### Der wahre Laufzeitwinkel

Die Darstellung der Umkehrfunktion  $\Phi_q(\Phi, \varphi)$  aus der Laufzeitgleichung (11) führt auf eine Funktionenreihe, deren Konvergenzeigenschaften sich selbst bei Vernachlässigung der Raumladung schwer übersehen lassen<sup>5</sup>. Wir haben deshalb im Integral der Gl. (12) deren Berechnung durch Einführung einer anderen Integrationsvariablen umgangen. In der Bestimmungsgleichung (13) für  $P_{q(\varphi)}$  erscheint jedoch  $\Phi_{g_2}$  als obere Grenze und muß nachträglich angenähert ermittelt werden. Die Berechnung erfolgt in zwei Schritten. In Gl. (11) wird zunächst an Stelle von  $\varphi$  die Eintrittsphase  $\varphi_1$  eingeführt. Mit Rücksicht auf den zulässigen Wert von  $q$ :  $1/(1 + q/2 \sin \varphi_1) \cong 1 - q/2 \sin \varphi$ , kann man dieselbe auf die Form bringen

$$\Phi_q = \bar{\Phi} + \epsilon h(\bar{\Phi}), \quad (15)$$

worin

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \Phi \left( 1 - \frac{q}{2} \sin \varphi_1 \right), \\ \epsilon &= -Q \left( 1 - \frac{q}{2} \sin \varphi_1 \right), \\ h(\Phi_q) &= \frac{1}{6} \Phi_q^3 - \frac{1}{4} \Phi_q^2 \Phi_{g_2} \\ &\quad + P_q(\varphi_1 + \Phi_q) - P_q(\varphi_1) - \Phi_q P'_q(\varphi_1). \end{aligned} \quad (15a)$$

Mit Hilfe eines von Lagrange angegebenen Umkehrsatzes läßt sich die Lösung  $\Phi_q(\Phi, \varphi_1)$  der

Gl. (15) (die in der speziellen Form  $\Phi_q = \Phi + \epsilon \sin \Phi_q$  die Gleichung des Keplerschen Problems ist) durch eine Potenzreihe nach dem zahlenmäßig kleinen Parameter  $\epsilon$  entwickeln:

$$\begin{aligned} \Phi_q(\bar{\Phi}) &= \bar{\Phi} + \epsilon h(\bar{\Phi}) + \frac{\epsilon^2}{2!} \frac{\partial}{\partial \Phi_q} [h^2(\Phi_q)] \bar{\Phi} \\ &\quad + \frac{\epsilon^3}{3!} \frac{\partial^2}{\partial \Phi_q^2} [h^3(\Phi_q)] \bar{\Phi} + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Die Konstante  $Q$  beträgt wegen der zulässigen Strahlverbreiterung nur wenige Prozente; daher kann auch  $\epsilon$  als genügend klein angesehen werden, so daß wir für die angestrebte Genauigkeit der Lösung nach dem zweiten Glied der Reihe abbrechen können:

$$\Phi_q = \bar{\Phi} + \epsilon h(\bar{\Phi}). \quad (17)$$

Für  $q = 0$  ist der daraus berechnete Laufzeitwinkel  $\Phi_{g_2}$  in Abb. 2 gestrichelt eingetragen. In dem in Frage kommenden Bereich von  $x$  liegen diese Werte in brauchbarer Übereinstimmung mit den aus Gl. (11a) berechneten.

Aus Gl. (17) und (15a) erhält man schließlich den gesuchten wahren Laufzeitwinkel unter Vernachlässigung höherer Potenzen von  $q$  mit

$$\begin{aligned} \Phi_{g_2} &= \Phi_{g_2} \left( 1 - \frac{q}{2} (1 + \delta_2) \sin \varphi_1 \right) \\ &\quad - Q \left( 1 - \frac{q}{2} \sin \varphi_1 \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\{P_q(\varphi_1 + \bar{\Phi}) - P_q(\varphi_1) - \bar{\Phi} P'_q(\varphi_1)\},$$

worin

$$\delta_2 = \frac{1}{24} x x_g.$$

Der nächste Schritt besteht darin, daß man Gl. (18) in der Umgebung von  $\Phi_{g_2}$  entwickelt; man setzt

$$\Phi_{g_2} = \Phi_{g_2} + \Delta.$$

Durch das Korrekturglied  $\Delta$  kommt der Einfluß der Aussteuerung auf den wahren Laufzeitwinkel zum Ausdruck. Wir ersetzen dabei in den trigonometrischen Funktionen einfach  $\varphi_1$  durch  $\Phi_{g_2} - \Phi_2$ . Dadurch wird ein Fehler begangen, der einer Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung in  $\Delta$  gleichkommt. Der veränderliche Anteil der Eingangsfeldstärke ist ferner eine periodische Funktion der Zeit und wir können daher  $P_q(\varphi)$  durch eine Fourier-Reihe darstellen:

$$P_q''(\varphi - \Phi_q) = A_0 + \sum_1^{\infty} A_\nu \sin(\nu \varphi - \nu \Phi_q - \gamma_\nu),$$

(19)

woraus

$$P_q(\varphi) = A_0 \frac{\varphi^2}{2} - \sum_1^{\infty} \frac{1}{\nu^2} A_\nu \sin(\nu \varphi - \gamma_\nu).$$

Darin drückt  $A_0$  den durch die Aussteuerung hervorgerufenen zusätzlichen Beitrag zum konstanten Anteil  $P_g$  (bzw.  $E_g$ ) aus;  $\gamma_\nu$  ist ein ebenfalls noch zu bestimmender Phasenwinkel. Da  $P_q(\varphi)$  mit  $q = 0$  verschwinden soll, entfallen weitere Integrationskonstanten. Das aus Gl. (18) berechnete Korrekturglied  $\Delta$  enthält nun die noch unbekannten harmonischen Komponenten  $A_\nu$  und  $\gamma_\nu$ . Zur Ermittlung derselben entwickeln wir Gl. (13) in der Umgebung von  $\Phi_{g_2}$  und brechen nach dem zweiten Glied ab:

$$U_2 = U_2(\Phi_{g_2}) + \left( \frac{\partial U_2}{\partial \Phi_{g_2}} \right)_{\Phi_{g_2}} \Delta = 0.$$

Wir erhalten so eine Beziehung, aus welcher sich durch Vergleich der entsprechenden Glieder Bestimmungsgleichungen für  $A_\nu$  und  $\gamma_\nu$  ergeben. Die Rechnung vereinfacht sich, wenn man berücksichtigt, daß  $x$  und  $x_g$  mit Hinblick auf die zulässige Strahlverbreiterung von der Größenordnung 1 sind und daß  $\Phi_2 > \pi$  sein soll. Das Ergebnis dieser Rechnung lautet:

$$A_0 \cong -\frac{q^2}{4} (1 + \delta_2) P_g,$$

$$A_1 = -\frac{q}{\Phi_2} P_g \cong \frac{q}{2},$$

$$A_2 \cong \frac{q^2}{4} \Phi_2 (1 + \delta_2) P_g \text{ usw.}$$

Wegen des verschiedenen Vorzeichens wirkt  $A_0$  dem statischen Glied  $P_g$  entgegen. Die Grundschwingung der veränderlichen Eingangsfeldstärke ist proportional  $q$  und laut Gl. (6) proportional der Stromdichte. Bei nicht allzu kleinen Werten von  $\Phi_2 (> \pi)$  sind  $A_0$  und  $A_\nu$  klein gegenüber  $P_g$ . Wir können daher im Ausdruck für den wahren Laufzeitwinkel die von den zeitlichen Schwankungen der Raumladung abhängige Funktion  $P_q(\varphi)$  mit ihren Ableitungen vernachlässigen und erhalten schließlich für den wahren Laufzeitwinkel

$$\Phi_q = \Phi_g - \frac{q}{2} \Phi_g (1 + \delta) \sin(\varphi - \Phi_g),$$

(20)

worin

$$\delta = \frac{Q \Phi^2}{2 \Phi_g} (\Phi_{g_2} - \Phi).$$

Mit  $Q = \delta = 0$  ergibt sich daraus die von Webster angegebene Lösung mit

$$\Phi_q = \Phi - \frac{q}{2} \Phi \sin(\varphi - \Phi).$$

Die Raumladung im Laufraum kommt also dadurch zum Ausdruck, daß im Koeffizienten des periodischen Gliedes der Gl. (20) an Stelle des statischen Laufzeitwinkels  $\Phi$ , der mit  $(1 + \delta)$  multiplizierte Laufzeitwinkel  $\Phi_g$  erscheint. Da dieser Koeffizient ein Maß für die Verdichtung der Elektronen ist, soll er mit Ballungsmaß bezeichnet werden.

#### Abnahme der Geschwindigkeitsunterschiede im Laufraum

Durch Einführung der Gl. (20) in Gl. (10) erhält man die Elektronengeschwindigkeit im Laufraum von der Form  $v/v_g = 1 + \frac{q'}{2} \sin \varphi_1$ , worin  $q'$  einen geänderten Aussteuerungsgrad bedeutet. Das Verhältnis  $q'/q$  ist in Abb. 5 in Abhängigkeit von  $\Phi/\Phi_2 = x/d_2$  für mehrere Werte von  $x$  aufgetragen. Nach einem anfänglichen leichten Anstieg nimmt es in der zweiten Hälfte des Lauf-

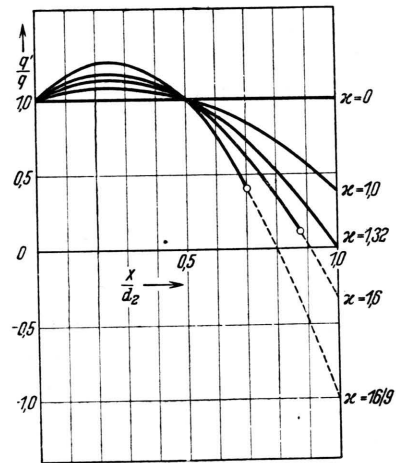


Abb. 5. Aussteuerungsgrad der Geschwindigkeit innerhalb des Laufraumes im Verhältnis zur Aussteuerung an der Eintrittsstelle.

raumes ab. Bei  $x = 1,32$  bzw.  $x_g = 1,82$  verschwinden die Geschwindigkeitsunterschiede am Ende des Laufraumes; bei höheren Werten von  $x$  findet dieser Ausgleich bereits im Inneren des Laufraumes statt.

### Überholung der Elektronen. Mehrdeutigkeit der Lösung

Nach gegenseitiger Einholung im sog. Treffpunkt eilen die raschen Elektronen den langsameren voraus, vorausgesetzt, daß die von der Aussteuerung herrührenden Geschwindigkeitsunterschiede durch die Raumladung nicht verlorengegangen sind. Man spricht dann von Überholung. Mit dieser Erscheinung ist eng verknüpft die Frage nach der Eindeutigkeit der Lösung der Laufzeitgleichung. Vor Erreichung des Treffpunktes sind an jeder Stelle nur Elektronen mit gleicher Geschwindigkeit und gleichen Laufzeiten vorhanden. Entsprechend liefert die Laufzeitgleichung eine eindeutige Lösung. Sobald jedoch Überholung eintritt, befinden sich an der betreffenden Stelle Elektronen mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Ihre Geschwindigkeiten und Laufzeiten sind daher nicht mehr eindeutige Funktionen. Hinsichtlich der Mehrdeutigkeit der Lösung der Laufzeitgleichung muß man zwei Fälle unterscheiden: Darstellung des wahren Laufzeitwinkels  $\Phi_q$  als Funktion von  $\Phi$  und  $\varphi_1$  oder als Funktion von  $\Phi$  und  $\varphi$ .

Die Lösung  $\Phi_q(\Phi, \varphi_1)$  der Gl. (15) durch den Laplaceschen Umkehrsatz führt auf eine eindeutige Funktion, die offenbar nur für einen Zweig derselben gilt, nämlich denjenigen, bei dem in der komplexen Zahlenebene dem Punkte  $\Phi = 0$  der Funktionswert  $\Phi_q = 0$  entspricht. Sie versagt in der Nähe singulärer Stellen. Diese sind in unserem Falle Verzweigungspunkte, welche bei festgehaltenem  $\varphi_1$  definiert sind durch

$$\partial\Phi/\partial\Phi_{q/\varphi_1=\text{konst}} = 0. \quad (21a)$$

Angewendet auf Gl. (15) folgt daraus für kleine Werte von  $q$ :  $Q\Phi_g^2 = 4$ . Dies ist aber nach Gl. (14) die Bedingung für Elektronenumkehr innerhalb des Laufraumes bei nichtgesteuertem Strahl. Die Eindeutigkeit der Umkehrfunktion  $\Phi_q(\Phi, \varphi_1)$  ist daher bei den zugelassenen Aussteuerungen so lange sinnvoll, als keine Elektronenumkehr stattfindet. Dies ist auch ohne weiteres einzusehen, da die Laufzeit eines Elektrons für einen gegebenen

Ort und eine bestimmte Eintrittszeit nur einen Wert aufweisen kann.

Betrachtet man hingegen eine Stelle des Laufraumes zu einer Zeitphase  $\varphi$ , dann können, wie bereits erwähnt, Elektronen verschiedener Startphase an dieser Stelle vorhanden sein und dementsprechend erscheint dann  $\Phi_q$  als eine mehrdeutige Funktion noch vor Eintritt der Elektronenumkehr. Die Gültigkeit der Umkehrung  $\Phi_q(\Phi, \varphi)$  erstreckt sich wiederum bis zum nächsten Verzweigungspunkt, welcher definiert ist durch

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\Phi_{q/\varphi=\text{konst}}} = 0. \quad (21b)$$

Durch diese Beziehung wird die Bedingung für die Überholung ausgedrückt.

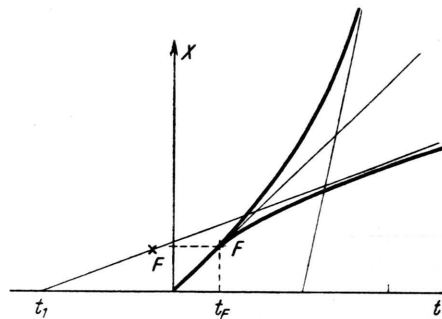


Abb. 6. Einhüllende der Weg-Zeit-Kurven der Elektronen ohne Berücksichtigung der Raumladung.

Die Dichte der Raumladung ist nach Gl. (1) und (6)

$$\varrho = \varepsilon_0 \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial x} = \varrho_g \frac{\partial\Phi_q}{\partial\Phi}, \text{ worin } \varrho_g = \frac{I_g}{v_g}.$$

An der durch Gl. (21b) definierten Stelle ist daher die Dichte der Raumladung unendlich groß.

Die auf funktionentheoretischem Wege gefundene Bedingung (21b) ergibt sich auch aus folgender Überlegung. Trägt man in einem Weg-Zeit-Diagramm den Ort  $x$ , an welchem sich ein Elektron zur Zeit  $t$  befindet, auf, so erhält man Bahnkurven, welche die Abszisse bei  $t = t_1$  schneiden (Abb. 6). Der geometrische Ort der Schnittpunkte benachbarter Bahnkurven liegt auf der Einhüllenden derselben, die in Analogie zur Optik mit Kauistik bezeichnet wird<sup>10</sup>. Längs derselben gilt  $\partial x/\partial t_1 = \partial\Phi/\partial\varphi_1 = 0$  und somit ergibt sich bei festgehaltenem  $t$  bzw.  $\varphi$  ( $\varphi_1 = \varphi - \Phi_q$ ) die Gl. (21b).

<sup>10</sup> F. B o r g n i s u. E. L e d i n e g g, Z. techn. Physik 21, 256 [1940].

Die bei  $x = 0$  eingeströmte Ladung  $I_g dt_1$  und die bei  $x$  durchfließende  $I dt$  sind einander gleich. Die Stromdichte beträgt somit

$$I = I_g \frac{dt_1}{dt} = I_g \frac{d\varphi_1}{d\varphi}. \quad (22)$$

Drückt man  $x$  durch  $t$  und  $t_1$  aus, so daß  $\Phi = \Phi(\varphi, \varphi_1)$ , so gilt bei festgehaltenem  $x$  bzw.  $\Phi$ :

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} d\varphi_1,$$

oder

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi} = - \frac{\partial \Phi / \partial \varphi}{\partial \Phi / \partial \varphi_1} = \frac{I}{I_g}.$$

Da längs der Einhüllenden der Nenner dieses Ausdruckes verschwindet, ist die Stromdichte an den Stellen der Einholungen unendlich. Die Kaustik besteht aus zwei Ästen (entsprechend der Mehrdeutigkeit der Laufzeitfunktion), die von einem Punkte ( $F$ ) ausgehen. Im Treffpunkt  $F$ , der dem Steuerraum nächstgelegenen Stelle der Einholung, besitzt der Strom nur eine einzige Spitze, die mit zunehmendem  $x$  und  $t$  in zwei Spitzen übergeht. Da der Strom eine periodische Funktion der Zeit ist, läßt er sich in eine Fourier-Reihe entwickeln:

$$I = \sum I_\nu e^{j\nu\varphi},$$

deren Koeffizienten unter Berücksichtigung der Gl. (22) lauten:

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I(\varphi) e^{j\nu\varphi} d\varphi \\ &= \frac{I_g}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j\nu\varphi} d\varphi_1. \end{aligned}$$

Ohne Berücksichtigung der Raumladung ist

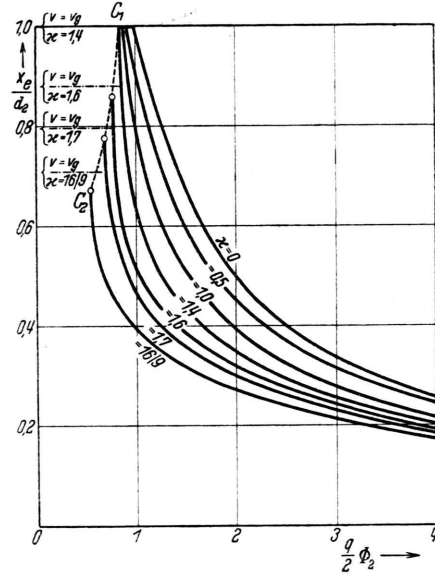
$$\varphi = \varphi_1 + \frac{\omega x}{v_1} \cong \varphi_1 + \Phi \left(1 - \frac{q}{2} \sin \varphi_1\right) \text{ und daher}$$

$$\begin{aligned} \eta_\nu &= \frac{I_\nu}{I_g} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j\nu\left(\varphi_1 - \frac{q\Phi}{2} \sin \varphi_1\right)} d\varphi_1 \\ &= J_1\left(\nu \frac{q\Phi}{2}\right), \quad (23) \end{aligned}$$

worin  $J_1\left(\nu \frac{q\Phi}{2}\right)$  die Besselsche Funktion  $\nu$ -ter Ordnung bedeutet. Im Argument derselben steht das Ballungsmaß. Das Verhältnis der Grundschwingung zum Gleichstrom besitzt ein Maxi-

mum von 58% bei  $q\Phi/2 = 1,84$ . Bei kleinen Aussteuerungen liegt der Treffpunkt, der durch das Auftreten einer einzigen Stromspitze gekennzeichnet ist, bei  $q\Phi/2 = 1$ . Das maximale Stromverhältnis liegt daher im Bereich der Elektronenüberholung und ist an das Auftreten von zwei Stromspitzen geknüpft.

Wir wollen nun unter Berücksichtigung der Raumladung die Lage  $x_e$  bzw.  $\Phi_e$  der Treffpunkte ermitteln und wenden die Bedingung (21b) auf Gl. (11) an. Der so berechnete Wert von  $\Phi_e$  ist





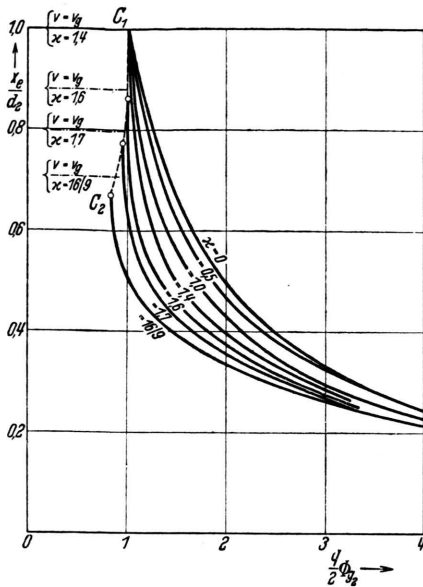


Abb. 8. Lage der Treffpunkte in Abhängigkeit von  $\frac{q}{2} \Phi_{g_2}$  bei sehr kleinen Aussteuerungen.

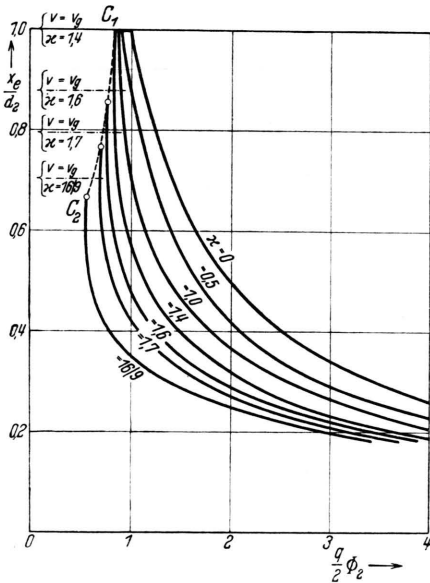


Abb. 9. Lage der Treffpunkte in Abhängigkeit vom Ballungsmaß bei der Aussteuerung  $q = 0,3$ .

Raumladung sinkt das erforderliche Ballungsmaß und erreicht bei  $\alpha = 1,4$  den Wert  $\frac{q}{2} \Phi_2 = 0,835$ . Gleichzeitig bleibt an dieser Stelle der Wert von  $\frac{q}{2} \Phi_{g_2} = 1$  unverändert (Punkt  $C_1$  in Abb. 8). Bis zu einer bestimmten Stromdichte kommt man also

mit geringeren Aussteuerungen aus. Die Raumladung wirkt daher auf die Ausbildung einer Stromspitze nicht defokussierend, sondern unterstützt vielmehr durch Verlängerung der Laufzeit im Laufraum die Einholung der Elektronen. Steigert man weiterhin die Raumladung ( $\alpha > 1,4$ ), so rückt der Treffpunkt in das Innere des Laufraumes. Entsprechend enden in den Abb. 7 bis 9 die Kennlinien auf der gestrichelten Linie  $C_1-C_2$ , längs welcher die Parameterdarstellung gilt:

$$q \Phi_{g_2} = \sqrt{8\alpha_g - \alpha_g}; \quad \frac{\Phi_e}{\Phi_2} = \frac{\Phi_{g_2}}{6\Phi_2} \left( \frac{16}{\sqrt{2\alpha_g}} - 3 \right).$$

Im vorhergehenden Abschnitt wurde festgestellt, daß bei einer Raumladungskonstante von  $\alpha = 1,32$  am Ende des Laufraumes die Wechselkomponente der Elektronengeschwindigkeiten verschwindet. (Die Abweichung gegenüber  $\alpha = 1,4$  rührt her von der zugelassenen Näherung durch Abbrechen nach dem zweiten Gliede der Gl. (17)). Bei höheren Werten von  $\alpha$  liegen die Stellen verschwindender Aussteuerung innerhalb des Laufraumes, decken sich jedoch nicht mit den Endpunkten der Kennlinien (längs  $C_1-C_2$ ), sondern sind diesen gegenüber gegen die Austrittsstelle hin verschoben. In den Abb. 7 bis 9 sind sie durch horizontale Striche gekennzeichnet. Längs  $C_1-C_2$  besitzt daher die Elektronengeschwindigkeit noch eine Wechselkomponente, die jedoch für eine Einholung nicht mehr ausreicht, da sich an dieser Stelle ein Beschleunigungsfeld befindet.

Mit Hinblick auf Gl. (20) erhält man den Wirkungsgrad bei Berücksichtigung der Raumladung, wenn man in Gl. (23) den statischen Laufzeitwinkel durch  $\Phi_g^{11}$  ersetzt. Für die Grundschwingung gilt dann

$$\eta = \frac{I_1}{I_g} = J_1 \left( \frac{q}{2} \Phi_g \right) = J_1 \left( \frac{q}{2} \Phi_{g_2} \cdot \frac{\Phi_g}{\Phi_{g_2}} \right). \quad (24)$$

Das Verhältnis  $\Phi_g/\Phi_{g_2}$  weicht nur wenig von  $\Phi/\Phi_2$  ab. Der nach Gl. (24) berechnete Wirkungsgrad besitzt einen Höchstwert von 44% längs der Kennlinie  $\alpha = 0$ . Mit zunehmender Stromdichte nimmt er ab. In der Austrittsebene behält er jedoch den Höchstwert von 44% bei, solange  $\alpha < 1,4$ .

Durch Zulassung von Überholung wird der Wirkungsgrad erhöht. Dessen Höchstwert beträgt im raumladungsfreien Fall nach Webster

<sup>11</sup> An Stelle von  $\Phi_g (1 + \delta)$  ist hierbei der exakte Wert von  $\Phi_g$  aus Gl. (11a) zu verstehen.

58% bei einem Ballungsmaß von 1,84. Der Treffpunkt liegt bei  $\Phi_e/\Phi_2 = 0,55$  (Abb. 7). Dieser hohe Wirkungsgrad setzt eine unverminderte Aussteuerung innerhalb des Laufraumes voraus. Infolge der Abnahme der Wechselkomponente der Geschwindigkeit kann man nur mit einer beschränkten Wirkung des Überholungseffektes rechnen. Aus der vorliegenden Untersuchung läßt sich immerhin erkennen, daß innerhalb der zu-

gelassenen Stromdichten Wirkungsgrade zwischen 44 und 58% zu erwarten sind.

Zufolge der Gl. (9) steigt die zulässige Stromdichte bei vorgegebenem  $Q$  mit abnehmender Wellenlänge rasch an. Der Hochstastbetrieb von Triftröhren eignet sich daher besonders für kurze Wellen.

Meinem Mitarbeiter Hrn. H. Pachmann (Prag) danke ich für die Prüfung der Ergebnisse dieser Arbeit.

## NOTIZEN

### Zur Existenz von zwei Massenwerten für Mesonen

Von Kurt Hogrebe

Physikalisches Institut der Universität Heidelberg  
(Z. Naturforsch. **3a**, 61 [1948]; eingegangen am 21. Dez. 1947)

Kürzlich wurde von Lattes, Occhialini und Powell<sup>1</sup> die Existenz von zwei Mesonen verschiedener Masse festgestellt. Sie fanden, daß der Massenunterschied kleiner als  $100 m_e$  ( $m_e$  = Elektronenmasse) und das Massenverhältnis größer als 1,5 ist. Diese beiden Ungleichungen sind nur dann erfüllbar, wenn die schwerere Mesonenmasse  $< 300 m_e$  und die leichtere  $< 200 m_e$  ist.

Dies veranlaßte mich zu einer statistischen Auswertung von 56 in der Arbeit von Fretter<sup>2</sup> und der Zusammenstellung von Hughes<sup>3</sup> mitgeteilten Meßergebnissen, die Mesonenmassen zwischen 100 und  $300 m_e$  lieferten. Hierbei wurden die Meßergebnisse unter  $100 m_e$  nicht berücksichtigt, da die Beobachter hierfür Fehlergrenzen  $> 100 m_e$  angeben. Ebenso wurden die in den obengenannten Arbeiten enthaltenen 6 Massenwerte über  $300 m_e$  von der Betrachtung ausgeschlossen, weil sie sich auf Grund der angegebenen Fehlergrenzen nicht auf Mesonenmassen unter  $300 m_e$  beziehen können. Die restlichen 56 Massenwerte wurden entsprechend den angegebenen Fehlergrenzen mit Gewichten versehen; die dann sich ergebende Verteilungskurve wurde nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen.

Das Ergebnis läßt eine Häufung der Massenwerte bei  $m_1 = 237 m_e$  und  $m_2 = 171 m_e$  erkennen (Abb. 1). In der Abbildung sind die mit den jeweiligen Gewichten multiplizierten Häufigkeiten der Massenwerte, für je  $10 m_e$ -Einheiten zusammengefaßt, in Abhängigkeit von den gemessenen Massenwerten aufgetragen. Zum Vergleich ist die zweikomponentige Gaußsche Fehlerkurve eingetragen, die sich aus der Ausgleichung ergibt. Die weitere Auswertung zeigt, daß die Verteilung der Meßwerte um die beiden Punkte  $m_1 = 237 m_e$

und  $m_2 = 171 m_e$  ganz zufallsmäßig ist; systematische Abweichungen von der Fehlerkurve treten nicht mehr auf. Die Genauigkeit der beiden angegebenen Massenwerte  $m_1 = 237 m_e$  und  $m_2 = 171 m_e$  beträgt etwa  $\pm 10 m_e$ .

Das Massenverhältnis ist 1,39, also kleiner als das von Lattes, Occhialini und Powell im Mittel gefun-

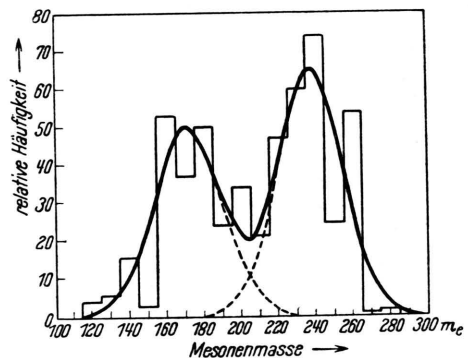


Abb. 1. Relative Häufigkeit der gewogenen Meßergebnisse in Abhängigkeit von der gemessenen Mesonenmasse.

dene Verhältnis von 1,9. Es ist daher fraglich, ob man die Werte von  $237 m_e$  und  $171 m_e$  dem  $\pi$ - bzw.  $\mu$ -Meson dieser Autoren zuordnen kann, oder ob dem  $\pi$ -Meson ein dritter Massenwert zwischen 300 und  $450 m_e$  zukommt. Falls man jedoch annimmt, daß die Masse des  $\mu$ -Mesons  $171 m_e$  ist, so würde nach Überlegungen von Lattes, Occhialini und Powell ein Massenverhältnis von 1,39 auf Grund der gemessenen Reichweite der  $\mu$ -Mesonen von 614  $\mu$  Emulsion bedeuten, daß das beim Zerfall des  $\pi$ -Mesons miterzeugte zweite, nicht ionisierende Teilchen eine Masse hat, die klein gegen die Mesonenmassen ist.

<sup>1</sup> C. N. G. Lattes, G. P. S. Occhialini u. C. F. Powell, Nature [London] **159**, 694 [1947]; **160**, 453, 486 [1947].

<sup>2</sup> William B. Fretter, Physic. Rev. **70**, 625 [1946].

<sup>3</sup> Donald J. Hughes, Physic. Rev. **71**, 387 [1947].